## דף תרגילים מס' 5 – מרחבי מכפלה פנימית

**תרגיל 5.1** יהי $C^0[-1,2]$ מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[-1,2]$.
אילו מן הביטויים הבאים מגדירים מרחב מכפלה פנימית על $C^0[-1,2]$ ואילו לא?

(א) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} |f(t)+g(t)|\,dt$.

(ב) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f(t)g(t)\,dt + f(-0.5)g(-0.5)$.

(ג) $\langle f,g\rangle = 3\int_{-1}^{2} f(t)g(t)\,dt$.

**תרגיל 5.2** יהי $C^2[-1,2]$ מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר $\langle f,g\rangle = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(t)g''(t)\,dt$. האם זוהי מכפלה פנימית ב-$C^2[-1,2]$?

**תרגיל 5.3** יהי $C^1[0,1]$ מרחב הפונקציות המרוכבות החלקות (בעלת נגזרת רציפה) בקטע $[0,1]$, כלומר המרחב מכיל פונקציות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$. הראו שהביטוי: $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx$, מהווה מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$.

**תרגיל 5.4** בדקו האם $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(t)|$ מהווה נורמה במרחב $C^0[a,b]$.

**תרגיל 5.5** הוכיחו על סמך אי-שוויון קושי-שוורץ שלכל $n$ מספרים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מתקיים האי-שוויון: $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

**תרגיל 5.6** הוכיחו שכל אחת מהקבוצות הבאות היא אורתוגונלית ביחס למכפלה פנימית הסטנדרטית בקטע.

**(א)** $0 \le x \le L$, $\left\{\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ **(ב)** $|x| \le L$ $\left\{1\right\} \cup \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$